Серия 8(а): и много немногочленов…то есть немного многочленов.

1. а) Существуют ли многочлены $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1$?

б) Тот же вопрос для тождества $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - x + 1)^3 R = 1$.

2. а) Разбейте отрезок $[0, 1]$ на черные и белые интервалы так, чтобы для любого многочлена $p(x)$ степени не выше второй сумма приращений p(x) по всем чёрным интервалам равнялась сумме приращений $p(x)$ по всем белым интервалам. (Приращением $p(x)$ по интервалу (a, b) называется число $p(b) - p(a)$).

б) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 2017?

3. Пусть $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = F(x)G(x)$, где F и G – многочлены, коэффициенты которых – нули и единицы ($n > 1$). Докажите, что один из многочленов F, G представим в виде $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})T(x)$, где $T(x)$ – также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k > 1$).

4. Пусть $f(x)$ – некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное число решений?

5. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$ с вещественными коэффициентами, что многочлен $P(x, y)^2 + 1$ делится на многочлен $x^2 + y^2 + 1$?

6. Для многочлена $Q(x)$ обозначим через $S(Q)$ среднее арифметическое всех его комплексных корней без учёта кратности (так, для многочлена $Q(x) = (x-1)^2(x^2+2x+2)$ имеем $S(Q) = -1/3$). Дан многочлен $P(x) = 6x^3+9x^2+6x+1$. Положим $R(x) = \underbrace{P(P(\ldots P}_{1000 \text{ букв } P}(x)\ldots))$. Найдите $S(R)$.

7. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.