Серия 7(d): ещё немножко формалистики.

1. Сколько существует пар натуральных чисел (m,n) таких, что $m,n \leqslant 1000$ и $\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$?

2. Для простого числа p нашлось такое целое число x, что x^2+x+3 делится на p. Докажите, что найдется целое число y, для которого y^2+y+25 делится на p.

3. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей – чисто периодические дроби с периодом T. Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T.

4. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде $3^{u_1}\cdot 2^{v_1} + 3^{u_2}\cdot 2^{v_2} + \dots + 3^{u_k}\cdot 2^{v_k}$, где $u_1 > u_2 > \ldots > u_k \geqslant 0$ и $0 \leqslant v_1 < v_2 < \ldots < v_k$ – целые числа.

5. Сто целых положительных чисел образуют арифметическую прогрессию. Возможно ли, чтобы любые два из этих чисел были взаимно простыми?

6. Для каждого натурального k обозначим через $r(k)$ произведение всех различных простых делителей числа k (положим $r(1)=1$). Докажите, что в последовательности, заданной произвольным натуральным первым членом и условием $a_{n+1} = a_n + r(a_n)$, встретится сколь угодно много последовательных членов, образующих арифметическую прогрессию.

7. Каждому натуральному числу n сопоставлено целое неотрицательное целое число n' по следующим правилам: (i) если p простое, то $p'=1$, (ii) $(ab)' = a'b + ab'$ для любых натуральных a и b. Решите уравнение $y' = y$.

8. Клетчатая "лесенка" состоит из n столбиков, нижние клетки которых составляют строчку из n клеток, а количества клеток в столбиках (слева направо) $1, 2, \ldots, n$. При каких n такую лесенку можно разбить на n квадратов с натуральными сторонами?