Серия 7(с), объединённая, как ни странно, двумя общими идеями.

1. Обозначим через $a(n)$ число способов, которыми данное натуральное число n можно представить в виде суммы нескольких (быть может, одного) натуральных слагаемых, больших единицы, с учетом их порядка. Докажите для каждого n тождество: $a(2) + a(4) + \ldots + a(2n) = a(2n+1)$.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – такие натуральные числа, что всевозможные их суммы по одному, по два, ..., по n (всего $2^n - 1$ сумм) попарно различны. Докажите, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2$.

3. В полном однокруговом турнире по футболу участвует $N > 2$ команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-ой игре забивает k голов. Каково наименьшее количество ничьих в таком турнире?

4. Набор гирь, каждая из которых весит натуральное число килограммов, называют *полным*, если из этих гирь можно составить любой натуральный вес от 1 кг до суммы весов всех гирь набора. Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным.

5. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD – в точке Q. Докажите, что если каждая из трех пар биссектрис: внешних углов четырехугольника при вершинах A и C, внешних углов при вершинах B и D, а также внешних углов при вершинах Q и P (треугольников QAB и PBC соответственно) имеет точку пересечения, то эти три точки лежат на одной прямой.

6. В последовательности $\{a_n\}$ $a_0 = 1$, $a_{2n+1} = a_n$, $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде a_{n+1}/a_n, $n \geqslant 1$.

7. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC взяли точки A_1, B_1, C_1. Точки, симметричные им относительно середин содержащих их сторон, обозначили A_2, B_2, C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики.

8. Пусть ABC – треугольник с центром тяжести G и ℓ – прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно таким образом, что A и G лежат в одной полуплоскости относительно ℓ. Докажите, что $S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} \geqslant \frac{4}{9} S_{ABC}$. Когда достигается равенство?