

Серия 7(в): рабочая комбинаторика.

1. В группе из n школьников нашлось A_1 пар школьников, веса которых отличаются не более чем на 1 кг, и A_2 пар школьников, веса которых отличаются не более чем на 2 кг. Докажите, что $A_2 < 3A_1 + n$.
2. Можно ли раскрасить все ребра полного графа на 3000 вершинах в 10 цветов так, чтобы не было одноцветных треугольников?
3. Петя задумал натуральное число $x \leq 10000$. За один вопрос Вася предъявляет квадратный трехчлен, а Петя отвечает, больше, меньше или равен 0 этот трехчлен в точке x . Может ли Вася гарантированно найти x за 12 вопросов?
4. Дугу окружности разбили на несколько дужек S_1, S_2, \dots, S_n , пронумерованных последовательно. Затем нарисовали несколько хорд, все концы которых различны. Концы любой хорды лежат на разных дужках. При этом, если две хорды пересекаются, то концы одной из них лежат в некоторых дужках S_i, S_j , а другой – в дужках S_j, S_k , причём $i < j < k$. Докажите, что хорды можно покрасить в три цвета так, чтобы пересекающиеся хорды были разноцветными.
5. Для каких нечётных n существует нечётное k и множество S из n остатков по модулю k такое, что при всех $r = 1, \dots, k - 1$ число элементов в пересечении $S \cap (S + r)$ чётно? Здесь множество $S + r$ получается из множества S прибавлением остатка r к каждому элементу.
6. В конечной последовательности, состоящей из натуральных чисел, встречается ровно 2017 различных чисел. Известно, что если из какого-нибудь члена этой последовательности вычесть 1, то в полученной последовательности тоже будет встречаться не менее 2017 различных чисел. Найдите минимальную возможную сумму членов исходной последовательности.
7. В очереди стояло 2000 человек. Касса сломалась, и все перешли в соседнюю, только что открывшуюся кассу. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь так, чтобы человек, стоявший на k -ом месте, изменил свой номер в новой очереди не более чем на k ?
8. Алеша поочередно рассматривает всевозможные упорядоченные пары подмножеств данного n -элементного множества. Рассмотрев каждую пару, он записывает число элементов в пересечении этих подмножеств. Какое число будет написано больше всего раз, когда Алеша рассмотрит все пары подмножеств?