Серия 7(a): должна была быть сплошная стереометрия.

1. На сфере выбраны точки A, B, C, D и E так, что отрезки AB и CD пересекаются в точке F, а точки A, C и F равноудалены от точки E. Докажите, что прямые BD и EF перпендикулярны.

2. Дан трехгранный угол с вершиной O. На его сторонах выбирают точки A, B и C так, что $OA + OB + OC = 1$. Докажите, что существует точка M, через которую проходит описанная сфера тетраэдров $OABC$ независимо от выбора точек A, B и C.

3. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A', B', C' соответственно. Точка C_1 – точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а точка C_2 – общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA' и C_1BB', отличная от C_1. Аналогично определяются точки A_1, B_1, A_2 и B_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

4. Тетраэдр $ABCD$ с остроугольными гранями вписан в сферу с центром O. Прямая, проходящая через O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает эту сферу в точке D' такой, что D и D' лежат по разные стороны от плоскости ABC. Прямая DD' пересекает плоскость ABC в точке P, лежащей внутри треугольника ABC. Докажите, что если $\angle APB = 2\angle ACB$, то $\angle ADD' = \angle BDD'$.

5. Даны сфера и фиксированная точка P внутри нее. Через P проводятся три попарно перпендикулярные хорды AA', BB' и CC'. Пусть X и X' – проекции P на плоскости ABC и $A'B'C'$. Доказать, что все прямые XX' проходят через одну точку.

6. В четырехугольной пирамиде $SA_1A_2A_3A_4$ сфера ω касается всех ребер. Докажите, что на ребрах SA_i существуют такие точки B_i, лежащие в одной плоскости, что ω касается всех сторон четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$, а также продолжений всех отрезков SB_i.

7. В n-элементном множестве выделены $n-1$ подмножеств. Докажите, что можно покрасить некоторые (хотя бы один) элементы в красный и синий цвета так, что в каждом выделенном подмножестве либо не будет окрашенных элементов, либо будут присутствовать элементы обоих цветов.

8. Из клетчатого прямоугольника склеен тор. Рассмотрим всевозможные разбиения его на одинаковые клетчатые прямоугольники чётной площади. Докажите, что количество этих разбиений чётно.