Серия 6(d), полная подсказок.

1. Среди ста действительных членов Великой академии Лапуты имеется a_k членов, возраст которых не меньше k лет ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Определите средний возраст академика.

2. Для каждого натурального n обозначим $d(n)$ число натуральных делителей n и положим $e(n) = \left[\frac{2000}{n}\right]$. Докажите, что $d(1) + d(2) + \ldots + d(2000) = e(1) + e(2) + \ldots + e(2000)$.

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве целых чисел, не превосходящих по модулю 1000. Обозначим через m число пар (x, y), для которых $f(x) = g(y)$, через n – число пар, для которых $f(x) = f(y)$, а через k – число пар, для которых $g(x) = g(y)$. Докажите, что $2m \leqslant n + k$.

4. Докажите, что если многочлены с целыми коэффициентами $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют общий не целый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

5. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% – налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, – развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

6. Последовательность $N^!$ определяется следующим образом: $1! = 1$, $N^! = N^{(N-1)^!}$ при всех $N \geqslant 2$. Докажите, что в последовательности $1^!, 2^!, \ldots, N^!, \ldots$, начиная с некоторого места, остатки от деления членов на 2011 периодически повторяются.

7. Множество из четырех натуральных чисел назовем *бипарой*, если его можно разбить на две пары последовательных натуральных чисел. Множество из шести натуральных чисел назовем *битройкой*, если его можно разбить на две тройки последовательных натуральных чисел (например, $\{3, 4, 9, 10\}$ и $\{6, 7, 8, 9\}$ – бипары, а $\{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ – битройка). Докажите, что количество бипар с наибольшим числом, не превосходящим n, равно количеству битроек с наибольшим числом, не превосходящим $n + 2$.

8. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, одним из корней которого является а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$?