Серия 6(с): немножко неравенств, но не только.

1. Петя и Вася придумали десять а) квадратных трёхчленов, б) многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

2. Пусть a, b, c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство: $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$.

3. Докажите, что для любого $x>0$ и натурального n выполнено неравенство $1+x^{n+1}\geqslant\frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$.

4. Докажите, что для n положительных чисел $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n$ выполнено неравенство $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2\geqslant(a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

5. Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите, что $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\geqslant 4$.

6. Дана функция $f(x)=2|x-a|+|x-b|+c$, где a, b, c – некоторые числа, $a<b$. Известно, что множество решений неравенства $f(x)\leqslant 3$ является интервалом длины 2. Докажите, что $f(x)>0$ при всех x.

7. Докажите, что при $u,v\geqslant 1/2$ выполняется неравенство $u^2v^2+2(u+v)\geqslant 4uv+1$.

8. Назовем тройку положительных чисел (a,b,c) *удобной*, если система неравенств $ax^2<bx+c$, $bx^2<cx+a$, $cx^2<ax+b$ имеет ровно два целых решения. Докажите, что тройка (a,b,c) удобна тогда и только тогда, когда a, b, c – длины сторон некоторого треугольника.