Серия 6(b): накопились вопросы.

1. Автобусная сеть на острове Невезения обладает следующими замечательными свойствами:
(i) у каждых двух автобусных маршрутов есть ровно одна общая остановка;
(ii) для каждых двух автобусных остановок существует ровно один соединяющий прямой маршрут;
(iii) на каждом маршруте ровно 8 остановок;
(iv) через каждую остановку проходят ровно 8 маршрутов.
а) Сколько на этом острове автобусных остановок?
б) Сколько на нем автобусных маршрутов?
в) Докажите, что такой остров (в океане) есть.

2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Докажите, что если $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, то $x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \ldots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.

3. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (*Магическим* называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)

4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x. При этом дается ответ "Да" или "Нет"). Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

5. На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?

6. У Мерлина есть две таблицы 21×21; одна из них пустая, а на другой, волшебной, написаны какие-то числа. Первая таблица прибита к скале у входа в пещеру, а вторая – к стене внутри пещеры. Вы можете обвести на первой таблице какой-нибудь квадрат (размером 1×1, 2×2, …или 21×21), расположенный в любом месте таблицы, и за шиллинг узнать у Мерлина сумму чисел, стоящих в клетках соответствующего квадрата на волшебной таблице. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы узнать сумму чисел на диагонали волшебной таблицы?

7. Из чисел $1, 2, \ldots, 2010$ некоторые 500 покрашены в белый цвет, а остальные – в голубой. Докажите, что количество последовательностей из 29 чисел одного цвета $(x_1, \ldots, x_{29})$, у которых сумма $x_1 + \ldots + x_{29}$ делится на 2010, не зависит от способа покраски. Напомним, что элементы в последовательности могут повторяться.

8. Множество целых чисел содержит более 3^k элементов. Докажите, что в нем можно выбрать $(k+1)$-элементное подмножество S так, что суммы элементов во всех непустых подмножествах множества S различны.