Серия 6(а): квазигуманизация

1. Для вещественных чисел α и β определим последовательности (a_n) и (b_n) соотношениями $a_1 = \alpha$, $b_1 = \beta$, $a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n$, $b_{n+1} = \alpha b_n + \beta a_n$. Найдите количество пар (α, β), для которых $a_{2017} = b_1$ и $b_{2017} = a_1$.

2. Даны вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2017}. Докажите, что найдётся такой индекс $1 \leqslant k \leqslant 2017$, что $4a_k a_{k+1} - 4a_{k+2}^4 \leqslant 1$. (Мы считаем, что $a_{2018} = a_1$, $a_{2019} = a_2$.)

3. Многочлены $P(x)$, $Q(x)$ таковы, что $x^{2017} = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)P(x) + Q(x)$, причем степень $Q(x)$ меньше 3. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)$ положительны.

4. Докажите (очередное) неравенство Минковского: $\sqrt[n]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\ldots(x_n + y_n)} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} + \sqrt[n]{y_1 y_2 \ldots y_n}$ при всех неотрицательных x_1, $\ldots$, x_n, y_1, $\ldots$, y_n.

5. Как известно, $a^{2017} + b^{2017}$ можно представить как многочлен от $a + b$ и ab. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

6. Найдите все функции $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям: а) $f(PQ) = f(P)f(Q)$, б) $f(P+Q) \leqslant \max(f(P), f(Q))$, в) $f(x) = \frac{1}{2}$ (то есть $f(P) = \frac{1}{2}$ для $P(x) \equiv x$), г) $f(c) = 1$ для любой ненулевой константы c. (Через $\mathbb{R}[x]$ обозначено множество всех многочленов с вещественными коэффициентами.)

7. Функция $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ такова, что $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что не существует возрастающих функций $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$, $h : [0; 1] \to \mathbb{R}$, для которых $f = g - h$.

8. Шоколадку ломают на кусочки. Каждый раз самый большой кусок (или один из самых больших, если их несколько) ломают на куски, каждый из которых составляет не более половины от исходного. Докажите, что после k шагов все куски будут составлять не более $\frac{2}{k+1}$ исходной шоколадки.