Серия 5(d): считать и думать!

1. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что если $cd = 1$, то на отрезке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

2. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три рациональных дроби, $be - af = 1$. Докажите, что $d \geqslant b + f$.

3. Докажите неравенство $0,785n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0,79n^2$. (При решении этой задачи разрешается пользоваться любыми сведениями из школьной программы.)

4. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2-1}{2}$.

5. Рассмотрим целочисленные точки (x, y) координатной плоскости, для которых $1 \leqslant x,\ y \leqslant 2017$. Отметим те из них, у которых координаты – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что отмеченных точек не менее половины.

6. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

7. Про положительные числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 известно, что $b_1^2 \leqslant a_1c_1$, $b_2^2 \leqslant a_2c_2$. Докажите, что $(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 3)^2$.

8. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 = 1$ и $a_{k+1} - a_k$ равно 0 или 1 при всех k. Докажите, что если $a_m = m/1000$ при некотором m, то найдется n такое, что $a_n = n/500$.