Серия 5(c): то же самое, только попроще.

1. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$ – 7 различных корней?

2. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

3. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ – квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x))) = 0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

4. Даны натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит числа $\sqrt{a+b}$.

5. Можно ли расставить по кругу все составные натуральные числа, не превосходящие 10^6, так, чтобы никакие два соседних числа не были взаимно просты?

6. По окружности расставлены в некотором порядке числа от 1 до 100. Назовем пару чисел *хорошей*, если эти два числа не стоят рядом, и хотя бы на одной из двух дуг, на которые они разбивают окружность, все числа меньше каждого из них. Чему может равняться общее количество хороших пар?

7. $P(x)$ — квадратный трехчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих, может быть в последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\ldots$?

8. На столе лежит чётное число карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Пусть a_k — количество карточек, на которых написано число k. Оказалось, что $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \geqslant 0$ для каждого натурального n. Докажите, что карточки можно разложить по парам, в каждой из которых числа отличаются на 1.