Серия 5(b): комбинаторика для разнообразия.

1. Ожерелье состоит из 100 синих и некоторого количества красных бусин. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 синих бусин, есть не менее 5 красных. Какое наименьшее количество красных бусин может быть в ожерелье?

2. На плоскости провели 100 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и отметили все точки их пересечения. После этого все прямые и k отмеченных точек стерли. При каком наибольшем k по оставшимся точкам пересечения заведомо можно восстановить исходные прямые?

3. Расстановку фишек в клетках квадрата $n \times n$ назовем *редкой*, если в любом квадрате 2×2 стоит не более 3 фишек. Сергей поставил в некоторые клетки доски по одной фишке так, что получилась редкая расстановка. Он заметил, однако, что если переставить любую фишку на любую свободную клетку, то перестановка перестанет быть редкой. При каких n это возможно?

4. По кругу стоят 2010 цифр, каждая из которых равна 1, 2 или 3. Известно, что при любом k в любом блоке из $3k$ подряд идущих цифр каждая из цифр 1, 2, 3 встречается не больше $k+10$ раз. Докажите, что существует блок из нескольких подряд идущих цифр, в котором цифр каждого из видов поровну.

5. Докажите, что произвольные N^2 попарно различных натуральных чисел ($N > 10$) можно расположить в таблице $N \times N$ так, чтобы все $2N$ сумм по строкам и по столбцам были различны.

6. На плоскости расположено n чёрных и n белых квадратов, каждый из которых может быть переведен в любой другой параллельным переносом. Каждые два квадрата разного цвета имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая хотя бы n квадратам.

7. На футбольном поле тренировалось n футболистов – нападающих и вратарей. Всего на тренировке было забито k голов. Докажите, что после тренировки Фабио Капелло может так раздать номера от 1 до n игрокам, что для любого гола разность между номерами нападающего и вратаря была не менее $n-k$.

8. В городе N. существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2017 обществ найдется человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2016 человек так, чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.