

Серия 5(а): очень разная комбинаторная геометрия.

1. Разложением квадрата называется разбиение его на конечное число прямоугольников, стороны которых параллельны сторонам квадрата. Разложение называется примитивным, если оно не является разбиением более крупного разложения. При каких n существует примитивное разложение квадрата на n прямоугольников?
2. На плоскости дано M точек, причем не все они лежат на одной прямой. Докажите, что можно найти не менее $(M - 1)(M - 2)/2$ треугольников с вершинами в этих точках.
3. Докажите, что прямая, которая делит площадь треугольника пополам, делит его периметр в отношении не более чем 3:1.
4. В круг вписан n -угольник со сторонами a_1, a_2, \dots, a_n , причем так, что центр круга лежит внутри n -угольника. Докажите, что этот круг можно покрыть n кругами радиусов $na_1/6, na_2/6, \dots, na_n/6$.
5. Докажите, что на плоскости существует такая конечная система точек, что для каждой точки этой системы найдутся по крайней мере сто равноудаленных от нее точек этой системы.
6. Из квадрата со стороной 1 000 000 вырезан квадратный уголок со стороной 0,001. Оставшаяся часть квадрата разбита на 10 прямоугольников. Докажите, что хотя бы в одном из них отношение длин сторон больше девяти.
7. На плоскости дано N попарно непараллельных прямых и точка P . Точка P проектируется на все данные прямые, полученные проекции опять проектируются на все прямые и т. д. Докажите, что все точки, полученные таким образом, можно покрыть одним кругом.
8. Правильный треугольник площади 1 лежит внутри выпуклого семиугольника площади 1,0000001. Докажите, что хотя бы один из углов семиугольника больше 139° .