Серия 4(d), с целыми частями

1. Для данного натурального n нашли наименьшее натуральное k такое, что $\left[\frac{n^2}{k}\right] = \left[\frac{n^2}{k+1}\right]$. Найдите (выразите через n) сумму $\left[\frac{n^2}{k}\right] + k$. Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

2. Какие натуральные числа нельзя представить в виде $[n + \sqrt{n} + 1/2]$ с натуральным n?

3. Найдите сумму $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right] + \ldots$

4. Докажите, что для любого натурального n: а) $[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = [\sqrt{4n+2}]$; б) $0 < \sqrt{4n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{16n\sqrt{n}}$.

5. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{q-1}{q}$.

6. n – натуральное число. Найдите сумму $\left[\sqrt{\frac{n}{1}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{5}}\right] + \ldots$, в которой в знаменателях стоят все натуральные числа, не делящиеся ни на какой квадрат, больший 1.

7. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leqslant n < 100d^2$.

8. Назовем изящным разбиение натурального числа на слагаемые, каждое из которых является степенью двойки и используется не более двух раз. У каких натуральных чисел количество изящных разбиений четно? (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за одно).