

Серия 4(с): отягощённые знанием.

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон AB , BC и CA в точках M , N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK , пересекает прямую MN в точке D . Прямая, проходящая через A и параллельная MN , пересекает прямую NK в точке E . Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC .

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) точка O – центр описанной окружности, точка I – центр вписанной окружности, а точка D на стороне BC такова, что прямые OD и BI перпендикулярны. Докажите, что прямые ID и AC параллельны.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный, M – точка пересечения перпендикуляров к AB в точке A и к CD в точке D , а N – точка пересечения перпендикуляров к AB в точке B и к CD в точке C . Докажите, что прямая MN содержит точку пересечения прямых AC и BD .

4. В треугольнике ABC точка D является серединой стороны AB , точки E и F лежат на отрезках AC и BC соответственно. Докажите, что площадь треугольника DEF не превосходит суммы площадей треугольников ADE и BDF .

5. Даны числа α , β , γ и k . Пусть x , y , z – расстояния от точки M внутри треугольника до его сторон. Докажите, что множество точек M таких, что $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$, или пусто, или отрезок, или совпадает со множеством всех точек треугольника.

6. Докажите, что если существует окружность, касающаяся прямых AB , BC , CD и DA , то ее центр и середины AC и BD лежат на одной прямой.

7. Докажите, что если $0 < a, b < 1$, то $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$.

8. Существуют ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы, составленные из 9 из них – точные квадраты?