**Серия 4(b), идейная**

1. Точка $P$ находится вне окружности с центром $O$. Прямые $L_1$ и $L_2$ проходят через точку $P$, причем $L_1$ касается окружности в точке $A$, а $L_2$ пересекает окружность в точках $B$ и $C$. Касательные к окружности в точках $B$ и $C$ пересекаются в точке $X$. Докажите, что $AX$ и $PO$ перпендикулярны.

2. На плоскости даны точки $A$ и $B$, а также прямая $\ell$, проходящая через точку $B$. Рассмотрим произвольную окружность $\omega$, касающуюся прямой $\ell$ в точке $B$ и не содержащую внутри себя точку $A$. Касательные к $\omega$, проведенные из точки $A$, касаются $\omega$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что прямая $XY$ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности $\omega$.

3. Точка $M$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$; $R$ – произвольная точка. Прямые $AR$, $BR$ и $CR$ пересекают описанную окружность в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Докажите, что точки пересечения прямых $MA_1$ и $BC$, $MB_1$ и $CA$, $MC_1$ и $AB$ лежат на одной прямой, проходящей через точку $R$.

4. Даны треугольник $ABC$ и некоторая точка $T$. Пусть $P$ и $Q$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $T$ на прямые $AB$ и $AC$ соответственно, а $R$ и $S$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $A$ на прямые $TC$ и $TB$ соответственно. Докажите, что точка пересечения $X$ прямых $PR$ и $QS$ лежит на прямой $BC$.

5. Хорды $KL$ и $MN$ окружности проходят через середину $O$ хорды $AB$. Докажите, что прямые $KN$ и $ML$ пересекают прямую $AB$ в точках, равноудаленных от точки $O$.

6. Через точку $Q$ проведены секущие $AB$ и $CD$ окружности $\omega$ $(A, B, C, D \in \omega)$. Прямые $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$, прямые $AD$ и $BC$ – в точке $R$. Докажите, что поляры точек $P$, $Q$ и $R$ относительно $\omega$ – соответственно $QR$, $PR$ и $PQ$.

7. На основании $BC$ треугольника $ABC$ лежит точка $M$, а на прямой $BC$ – точка $N$ такая, что $\angle MAN = 90°$. Докажите, что четвёрка $B$, $C$, $M$, $N$ гармоническая тогда и только тогда, когда $AM$ – биссектриса угла $\angle BAC$.

8. Выберем на высоте $BH$ треугольника $ABC$ произвольную точку $P$. Пусть $K$ – точка пересечения прямых $AP$ и $BC$, $L$ – точка пересечения прямых $CP$ и $AB$. Докажите, что отрезки $KH$ и $LH$ составляют равные углы с высотой $BH$.