Серия 4(а): клетчатая комбинаторика.

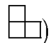
1. Дано натуральное число k. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях – одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды и не пересекающий дважды один и тот же отрезок границы, что суммарная взятка на нем кратна k.

2. Какое наименьшее количество клеток нужно закрасить в таблице 2015×2015 для того, чтобы в каждом квадрате 4×4 было закрашено не меньше половины клеток?

3. Из картонного клетчатого прямоугольника $n \times (n-1)$ вырезан *уголок*, состоящий из всех клеток первой строки и первого столбца (всего в нем $2n-2$ клетки). Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрашены в k цветов так, что при любом положении картонного уголка на этой плоскости (с учетом поворотов и переворотов) все покрытые им клетки имеют разный цвет. При каком наименьшем k это возможно?

4. На клетках бесконечной доски стоят несколько шашек. Разрешается переместить любую шашку на клетку, симметричную ей относительно какой-нибудь другой шашки; допускается наличие нескольких шашек на одной клетке. В позициях A и B все шашки стоят на разных клетках, расположенных не на одной прямой, и из A можно получить B указанными операциями. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в промежуточных позициях все шашки стояли на разных клетках.

5. Из квадрата размером 1999×1999 клеток вырезано несколько клеток так, что оставшуюся часть можно единственным способом разбить на прямоугольники 1×2. Докажите, что количество вырезанных клеток больше 1000.

6. Докажите, что число способов разрезать прямоугольник 998×999 на уголки (фигурки вида ) не превосходит числа способов разрезать прямоугольник 1998×2000 на уголки так, что никакие два уголка не образуют прямоугольника 2×3.

7. Клетки квадрата 2000×2000 закрашивают по следующим правилам. В любой момент можно закрасить одиночную клетку, если ни одна из соседних с ней клеток еще не закрашена; или прямоугольник 1×2, если к этому моменту уже закрашены ровно две из соседних с ним клеток; или квадрат 2×2, если уже закрашены 8 соседних с ним клеток. (Соседними считаются клетки, примыкающие по стороне.) Можно ли закрасить весь квадрат?

8. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске $n \times n$ так, чтобы каждая из них била четное число других? Мы считаем, что одна ладья бьет другую, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей.