Серия 3(d), с иррациональностями

1. Существует ли последовательность натуральных чисел такая, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде разности двух членов этой последовательности?

2. а) Могут ли при некотором вещественном a одновременно быть целыми числа $a+\sqrt{15}$ и $\sqrt{15}-\frac{1}{a}$?

б) Найдите все такие a.

3. Перед алкоголиком Васей стоят две бесконечно большие бочки со спиртом. У Васи есть два очень ценных ковша: один емкостью $2\sqrt{2}-2$ литров, а другой – $\sqrt{2}$ литров. удастся ли ему с их помощью перелить из одной бочки в другую 1 литр спирта ?

4. Целые числа $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k$ обладают тем свойством, что если $i < j$, то десятичная запись числа n_j не начинается с десятичной записи числа n_i (например, если n_i равно 13, то n_j не может равняться 135). Докажите, что $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots+\frac{1}{n_k} \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}$.

5. Докажите, что каждая правильная дробь $\frac{a}{b}$ может быть представлена в виде $\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2q_3}+\ldots+\frac{1}{q_1q_2\cdots q_n}$, где q_1, q_2, …, q_n – натуральные числа, причем $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n$. Доказать.

6. Найдите первые 100 знаков после запятой в десятичной записи числа $(1+\sqrt{2})^{2017}$.

7. Докажите, что не существует рациональных чисел a, b, c и d таких, что $(a+b\sqrt{3})^4+(c+d\sqrt{3})^4=1+\sqrt{3}$.

8. Положительные рациональные числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+2abc+ab=abc^2$. Докажите, что $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ – рациональное число.