Серия 3(с): очень бодрящая арифметика.

1. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делит его диагонали в равных отношениях.

2. У квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами значение в 0 по модулю не превосходит 800. Также известно, что $f(120)$ – простое число. Докажите, что у него нет целых корней.

3. Число M – произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Докажите, что любое натуральное число, меньшее M, можно представить в виде суммы не более n натуральных делителей числа M.

4. Различные натуральные числа a, b, c таковы, что $(a^2 + b^2)c = 2a^2b$. Докажите, что $|a^2 - bc| > a + c$.

5. Существуют ли 1000 натуральных чисел таких, что наибольшие общие делители всевозможных наборов этих чисел (по два, по три, …, по тысяче) попарно различны?

6. a и b – различные натуральные числа, большие 1, и $a^2 + b - 1$ делится на $b^2 + a - 1$. Докажите, что число $b^2 + a - 1$ имеет хотя бы два различных простых делителя.