Серия 3(b): геометрическая артподготовка

1. Две точки P и Q называются *сопряжёнными* относительно окружности ω, если окружность с диаметром PQ перпендикулярна ω.

Множество точек, сопряжённых точке P относительно окружности ω, называется (в этой задаче) *полярой* P относительно ω.

а) Докажите, что Q принадлежит поляре относительно ω тогда и только тогда, когда $OQ^2 - PQ^2 = 2R^2 - OP^2$ (R – радиус окружности ω).

б) Докажите, что поляра P относительно ω – прямая, перпендикулярная OP.

в) Докажите, что поляра точки P, лежащей вне ω, проходит через точки касания с ω касательных, проведенных из P.

г) Докажите, что для каждой прямой p существует единственная точка P, полярой которой относительно ω является p.

Такая точка P называется *полюсом* прямой p относительно ω.

д) Докажите, что точка P лежит на поляре q точки Q тогда и только тогда, когда Q лежит на поляре p точки P.

Определение. Двойное отношение точек A, B, C, D на прямой – величина $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ (отрезки берутся направленными).

Определение. Четыре точки A, B, C, D одной прямой образуют *гармоническую четверку*, если $[A, B, C, D] = -1$. Иногда говорят еще, что точки A и C *гармонически сопряжены* относительно точек B и D.

2. Через точку M, не лежащую на кривой C, проводятся всевозможные секущие, пересекающие C в точках P и Q. На каждой такой прямой построим точку X такую, что точки M, X, P, Q образуют гармоническую четвёрку. Докажите, что все построенные точки X лежат на одной прямой, если

а) C – окружность,

б) C – произвольная кривая второго порядка.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = \alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F – середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

4. M – точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника, N – точка пересечения его средних линий, O – центр описанной окружности. Докажите, что $OM \geqslant ON$ (средней линией называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

5. Обозначим $p(n, k)$ количество разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые, не превосходящие k (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми), а $p(n) = p(n, n)$ – общее количество разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. Докажите, что $p(10000, 100)^2 \leqslant p(30000)$.

6. Точка D – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MNC, равны.

7, Сколько решений имеет сравнение $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod p$ а) при простом $p = 4k + 1$, б) при простом $p = 4k - 1$?

8. Даны простое p и p^2 линейных функций $\ell_k(x, y) = a_k x + b_k y$ двух переменных. Известно, что для каждых целых чисел u и v, хотя бы одно из которых не кратно p, все остатки от деления на p встречаются в наборе чисел $\ell_k(u, v)$ ровно по p раз. Докажите, что в наборе пар (a_k, b_k) встречаются все возможные пары остатков при делении на p.