Серия 3(а): неравенства.

1. Докажите, что для любой последовательности положительных чисел a_n целые части квадратных корней из чисел $b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n)$ все различны.

2. Пусть сумма n чисел равна 0, причем m – наименьшее из них, а M – наибольшее. Докажите, что

а) сумма квадратов этих чисел не превосходит $-mMn$;

б) сумма четвертых степеней этих чисел не превосходит $-mMn(m^2 + M^2 + mM)$.

3. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ не превосходит $n/3$.

4. Пусть a, b, c – положительные числа и $abc = 1$. Докажите неравенства

а) $\dfrac{1}{1+2a} + \dfrac{1}{1+2b} + \dfrac{1}{1+2c} \geqslant 1$,

б) $\dfrac{1}{1+a+b} + \dfrac{1}{1+b+c} + \dfrac{1}{1+c+a} \leqslant 1$.

5. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_n справедливо неравенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n})^2.$$

6. Пусть a, b, c – положительные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

7. Докажите неравенство $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^2 \geqslant \sqrt[n+1]{(n+1)!} \cdot \sqrt[n-1]{(n-1)!}$ при всех $n \geqslant 2$.

8. Докажите, что для любых n положительных чисел a_1, a_2, …, a_n, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geqslant (n^2 - 1)^n.$$