Серия 2(d): сухой корм.

1. Для каждого натурального n положим $a_n = n+m$, где m – наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^{2^m} \leqslant n2^n$. Какие натуральные числа не являются членами последовательности (a_n)?

2. У натурального числа n ровно 120 натуральных делителей (считая 1 и n). Для каждого делителя d числа n нашли неполное частное и остаток от деления $4n-3$ на d. Пусть Q – сумма всех полученных неполных частных, а R – сумма всех полученных остатков. Чему может быть равно число $Q-4R$?

3. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$ при $n \geqslant 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $b_{n+3} = b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n$ при $n \geqslant 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся в обеих последовательностях?

4. Последовательность $\{a_i\}$ задается следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что $a_{2n-1} - (-1)^n$ делится на a_n.

5. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, ... целых неотрицательных чисел, в которой каждое целое неотрицательное число встречается ровно один раз, такая, что последовательность $b_n = a_n + n$ состоит из всех квадратов натуральных чисел, взятых по одному разу?

6. В последовательности a_1, a_2, ... целых чисел есть бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Для каждого n числа a_1, a_2, ..., a_n дают попарно различные остатки при делении на n. Сколько раз в последовательности встречается число 2016?

7. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Докажите, что любые два члена этой последовательности взаимно просты.

8. В ряд выписаны 100 положительных чисел. При этом выполняется такое свойство: если числа a, b, c стоят подряд в этом ряду (именно в таком порядке), то $b = \frac{2ac}{a+c}$. Известно, что первое число равно 1, а последнее равно 2. Найдите второе число в ряду.