Серия 2(с): займемся алгеброй.

1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно. Диагональ BD пересекает стороны AM и AN треугольника AMN соответственно в точках E и F, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка K, определяемая условиями $EK \parallel AD$, $FK \parallel AB$, лежит на отрезке MN.

2. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK.

3. Докажите, что при натуральном $m > 3$ $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant m \\ x^2-x+1 \,\vdots\, m}} x$ делится на $m+1$.

4. Решите систему уравнений: $(x+y)^3 = z$, $(z+y)^3 = x$, $(x+z)^3 = y$.

5. График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ с рациональными коэффициентами параллельно перенесли на вектор $\overrightarrow{u} = (x_0, y_0)$, координаты которого – также рациональные числа и $x_0 \neq 0$. Докажите, что точка пересечения этих двух графиков имеет рациональные координаты.

6. Известно, что $a^5 - a^3 + a = 2$. Докажите, что $3 < a^6 < 4$.

7. Функция $f(x)$ определена при каждом натуральном x условием $f(x) = y$, где $y! \leqslant x < (y+1)!$. Докажите, что $f(a^2) + f(b^2) \leqslant 2f(ab) + 1$ при всех натуральных a и b.