Серия 2(b), алгебраическая

1. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ – корни многочлена $x^3 - 3x - 1$. Докажите, что $x_3^2 - x_2^2 = x_3 - x_1$.

2. Докажите, что существует функция $f(x)$, которая определена на $[0; +\infty]$ и такова, что $f(f(\ldots(x)\ldots)) = \frac{x}{x+1}$ (функция f применяется 30 раз).

3. Функция $f(x) = x^3 - 3\mathrm{x}$ задана на всей вещественной оси. Докажите, что функция $f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$ принимает некоторое значение не менее чем 2017 раз.

4. Полиномы $P(\mathrm{x})$ и $Q(x)$ таковы, что для любого вещественного x выполняется равенство $P(x^2 - \mathrm{x} + 1) = Q(x^2 + \mathrm{x} + 1)$. Докажите, что оба полинома – константы.

5. В клетках таблицы $N \times N$ расставлены числа так, что на пересечении i-го столбца и j-й строки стоит число $1/(i+j-1)$. Затем в клетках таблицы расположили N ладей так, что никакие две ладьи не бьют друг друга. Докажите, что сумма чисел под ладьями не меньше единицы.

6. Докажите, что при любых положительных a, b, c выполнено неравенство $-1 \leqslant \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{11} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{11} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{11} \leqslant 1$.

7. Существуют ли четыре различных числа такие, что любые два из них – x и y – связаны соотношением $x^{10} + \mathrm{x}^9 y + \mathrm{x}^8 y^2 + \ldots + xy^9 + y^{10} = 1$?

8. Даны неотрицательные вещественные числа A, B, C и D. Докажите неравенство $\max(A^2 - B, B^2 - C, C^2 - D, D^2 - A) \geqslant \max(A^2 - A, B^2 - B, C^2 - C, D^2 - D)$.