Серия 2(а), графская.

1. Каждый сотрудник компании "Кака-кола", имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо.

2. В некоторой государстве 2001 город, причем любые два города соединены прямым рейсом автобуса или поезда. Пользуясь только одним из этих двух видов транспорта, невозможно объехать 16 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно. Докажите, что, пользуясь только одним видом транспорта невозможно объехать 17 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно.

3. Город расположен на нескольких островах, соединенных между собой мостами. При поездках по городу жители выражают длину своего пути числом мостов, которые им приходится переезжать. После того как один из мостов закрыли на ремонт, каждый горожанин заявил: "У меня есть друг, кратчайший путь к которому содержит теперь на один мост больше, чем раньше". Докажите, что хотя бы один из островов – необитаемый.

4. Ребра графа покрашены в четыре цвета таким образом, что у любого пути из трех ребер первое и третье ребро покрашены в разные цвета (начало и конец пути могут совпадать). Докажите, что вершины этого графа можно покрасить в пять цветов таким образом, что любые две соединенные ребром вершины были покрашены в разные цвета.

5. В стране 1000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что один из концов любой дороги является городом, из которого выходит не более 10 дорог. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

6. В интернете имеется $n = 2^{2^k}$ (k – натуральное) страниц, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Изначально для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ на странице i имеется ссылка на страницу $i+1$. Разрешается на странице поставить ссылку на страницу, номер которой больше ее номера. Докажите, что можно поставить не больше $3kn$ новых ссылок (всего на всех страницах) так, чтобы с любой страницы можно было перейти на страницу, номер которой больше ее номера, не более, чем за 3 перехода по ссылкам.

7. В некотором графе G для любого множества его вершин количество вершин в этом множестве не превосходит количества вершин, смежных хотя бы с одной вершиной этого множества. Докажите, что из этого графа можно выкинуть не более трети всех вершин таким образом, что остальные вершины можно будет разбить на непересекающиеся пары смежных.

8. В графе больше двух вершин, он связен и остается связным при удалении любой вершины. Докажите, что из этого графа можно удалить пару смежных вершин таким образом, чтобы он остался связным.