Серия 1(d): на границе алгебры и комбинаторики

1. Стекло имеет форму квадрата площади 1. На обеих сторонах этого стекла нарисованы карты, по пять стран на каждой карте. Страны на одной стороне стекла закрашены пятью различными красками. Докажите, что можно закрасить страны на противоположной стороне стекла теми же пятью красками так, чтобы разные страны были закрашены разными красками, и общая площадь участков стекла, окрашенных с обеих сторон в один цвет, была не меньше $1/5$.

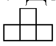
2. Из шахматной доски вырезан прямоугольник со сторонами, параллельными ее краям (стороны не обязательно идут по границам клеток). Докажите, что разность площадей белой и черной его частей не превосходит площади одной клетки.

3. Слово из $n > 1$ букв можно разбить на несколько одинаковых кусков. Докажите, что если заменить первую букву другой, получившееся слово разбить таким образом не удастся.

4. Из целых чисел от 1 до $3n$ выбрали $n + 2$ каких-то чисел. Доказать, что при $n > 1$ среди выбранных чисел непременно найдутся два таких, разность между которыми больше n, но меньше $2n$.

5. Последовательность $\{n_k\}$ определена рекуррентно: n_0 – некоторое натуральное число, а при $k \geqslant 0$ число n_{k+1} – сумма кубов цифр десятичной записи n_k. Докажите, что последовательность $\{n_k\}$ периодична.

6. Квадрат 600×600 разбит на фигурки из 4 клеток в виде буквы T. В каждой из “’вертикально” расположенных фигурок (т.е. таких, у которых в одном столбце три клетки, в другом – одна) записано число 2^k, где k – номер столбца, в котором находится одна ее клетка. Докажите, что сумма всех записанных чисел делится на 9.

7. Докажите, что клетчатый прямоугольник $2004^2 \times 2^{2004}$ можно разрезать на прямоугольники 1×3 и фигурки вида  нечетным числом способов (фигурки можно поворачивать).

8. Пусть $n > 2$ – целое число. Какая цифра стоит после запятой в десятичной записи числа $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + n}$?