

Серия 1(с): хчл.

1. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y = x^2$. Потом оси координат стерли – осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?
2. Каково наименьшее натуральное число a , для которого найдется квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом a , имеющий два различных положительных корня, меньших единицы?
3. Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0$, то квадратные трехчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.
4. В каком наибольшем числе различных целых точек квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого $a > 100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7, \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7. \end{cases}$$
6. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1 . Докажите, что $b \leq -\frac{1}{4}$.
7. У квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) с целыми взаимно простыми в совокупности коэффициентами есть два рациональных корня x_1 и x_2 таких, что $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Докажите, что $a - 2c$ – точный квадрат.
8. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

- б)* Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y .