**Серия 1(b): только не бросайте меня в комбинаторику!**

1. Прямоугольник $300 \times 1000$ разрезан на квадраты $1 \times 1$, и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гирьки. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек – не более чем по десять в каждой – так, что их центры тяжести совпадут.

2. В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации представили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

3. Пусть $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $x_i + y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \ldots (1 - y_n^m) \geqslant 1$ для любых натуральных $m$ и $n$.

4. Города одной империи с $k$ столицами соединены дорогами так, что из любого города в любой другой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что империю можно разделить на $k$ республик так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с каждым городом в ней содержался бы кратчайший путь из этого города до столицы (кратчайшим считается путь, состоящий из минимального числа дорог).

5. Все стороны и диагонали выпуклого $n$-угольника покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдется не менее $\left[\frac{n+1}{3}\right]$ одноцветных отрезков, никакие два из которых не имеют общих точек (даже вершины).

6. В таблице $2017 \times 2017$ каждая клетка $(x, y)$ задается номерами $x$ и $y$ ее столбца и строки. Некоторые клетки закрашены. Пусть $S_{i,j}$ – множество всех закрашенных клеток $(x, y)$, для которых $x \leqslant i$ и $y \leqslant j$. В начале в каждую закрашенную клетку $(i, j)$ записывают количество $|S_{i,j}|$ клеток в множестве $S_{i,j}$. На $n$-м шаге в каждую закрашенную клетку записывают сумму всех чисел, стоящих в клетках множества $S_{i,j}$ после $(n-1)$-го шага. Докажите, что после какого-то шага все числа в закрашенных клетках будут нечетны.

7. Дано 20 стоэлементных множеств. Любые два имеют ровно один общий элемент. Для любого элемента их объединения на доску записали квадрат количества данных множеств, содержащих этот элемент. Чему может быть равна сумма всех выписанных на доску чисел?

8. На плоскости отмечены 44 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть шестью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть шестью прямыми.