Серия 1(а): арифметика.

1. Дан конечный набор различных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все их простые делители не превосходят данного числа n. Докажите, что сумма величин, обратных к этим числам, не превосходит n.

2. Найдите все тройки целых неотрицательных x, y, z такие, что $7^x + 2^y = 3^z$.

3. Последовательность (a_k) состоит из положительных чисел и такова, что $(\mathrm{a}_{k+1} + k)a_k = 1$ для любого k. Докажите, что все ее члены – иррациональны.

4. На доске написано натуральное число. Каждую секунду к нему прибавляется сумма его цифр, стоящих на четных местах его десятичной записи (цифра десятков, цифра тысяч и т. д.). Докажите, что рано или поздно число на доске перестанет изменяться.

5. В множестве натуральных чисел выбрали три попарно непересекающихся подмножества. Докажите, что можно выбрать числа X и Y, принадлежащие двум различным выбранным подмножествам таким образом, что сумма $X + Y$ не принадлежит третьему подмножеству.

6. Пусть $d(n)$ – число делителей натурального числа n. Найдите все возрастающие последовательности натуральных чисел a_1, a_2, ...такие, что $d(a_i + a_j) = d(i + j)$ при всех натуральных i и j.

7. Натуральные числа a и b таковы, что $2a - 1$, $2b - 1$ и $a + b$ простые. Докажите, что ни $a^b + b^a$, ни $a^a + b^b$ не делятся на $a + b$.

8. Пусть $n \geqslant a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ – натуральные числа такие, что $[a_i, a_j] \leqslant n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leqslant n$ при всех i.