

Вступительные задачи, 8 класс

1. Найдите а) 100-ю, б) 101-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{0,999\dots999}$ (100 девяток).
2. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120° .
3. Докажите, что среди n -значных чисел найдется более 8^n таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности никакая цифра) не встречается два раза подряд.
4. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.
5. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам менее 500 км. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 км.
6. В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце равно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.
7. а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?
б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых – не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?
8. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки X и Y . Прямая, параллельная AB , проходящая через X , пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, параллельная BC , проходящая через Y , пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Докажите, что треугольники XRS и YPQ равновелики.
9. В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC , $\angle C = 90^\circ + \angle B/2$, $\angle AMC = 45^\circ$. Найдите углы треугольника ABC .
10. Куб натурального числа записывается более чем тремя цифрами и не оканчивается нулем. Когда у него зачеркнули три последние цифры, получился также куб натурального числа. Чему мог быть равен исходный куб?