

Вступительные задачи, 9 класс

1. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leq x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leq 1$.
2. Рассматриваются прямоугольные таблицы $m \times n$, целиком заполненные крестиками и ноликами. A – число таблиц, где есть столбец или строка крестиков. B – число таблиц, где есть столбец ноликов либо строка крестиков. Какое из этих чисел больше?
3. a, b, c – натуральные числа. Докажите, что если $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101, то и $ca + 9a + 81$ делится на 101.
4. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.
5. Найти все пары чисел a, b такие, что квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + ax + b$ во всех точках отрезка $[0; 4]$ принимает значения, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.
6. вещественные числа a, b, c удовлетворяют условиям $|a| > 2$ и $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$. Докажите, что существуют такие вещественные x и y , что выполнены равенства $a = x + 1/x, b = y + 1/y, c = xy + 1/xy$.
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки P, Q, R, S – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что внутри четырёхугольника $PQRS$ найдется такая точка X , что площади четырёхугольников $XSAP, XPBQ, XQCR$ и $XRDS$ равны.
8. В школе работает несколько кружков, в каждом не более 10 учеников. Известно, что у любых 11 кружков есть общий участник. Докажите, что есть ученик, который участвует во всех кружках.
9. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC , а точка M – середина стороны BC . Прямая MI пересекает сторону AB в точке D , а прямая, проходящая через B перпендикулярно AI , пересекает отрезок CI в точке K . Докажите, что KD параллельно AC .
10. Докажите, что число k рационально тогда и только тогда, когда из бесконечной последовательности $k, k + 1, k + 2, \dots$ можно выбрать три различных числа, которые образуют геометрическую прогрессию.