

Вступительные задачи, 10 класс

1. В бесконечной последовательности цифр между каждыми двумя последовательными цифрами можно вставить от 1 до k любых цифр. При каком наименьшем k можно такими операциями превратить любую последовательность в периодическую?
2. Вершины 101-угольника C имеют целые координаты. Никаких точек с целыми координатами, кроме вершин, на сторонах C нет. Докажите, что по крайней мере на одной стороне есть точка с координатами (x, y) , где $2x$ и $2y$ – нечетные целые числа.
3. Для вещественных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2n}$ докажите неравенство: $(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})^2 \geq 4n(a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \dots + a_n a_{2n})$.
4. Пусть $n > 1$ – натуральное число, а простое число p таково, что $p - 1$ делится на n , а $n^3 - 1$ делится на p . Докажите, что число $4p - 3$ – точный квадрат.
5. Докажите, что уравнение $\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$ имеет бесконечно много решений в рациональных, но не целых числах.
6. В множестве S выделены n трехэлементных множеств. При каком наибольшем n элементы S заведомо можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждом из n подмножеств были элементы обоих цветов?
7. N точек соединены друг с другом некоторым количеством отрезков; из каждой точки выходит не более 11 отрезков. Докажите, что точки можно покрасить в 4 цвета так, чтобы отрезков с одноцветными концами было не более N .
8. На сторонах AB и AC нашлись такие точки P и Q соответственно, что $BC = BQ = CP$. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности треугольника APQ перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ABC .
9. Точки A' , B' и C' симметричны вершинам A , B и C остроугольного треугольника ABC относительно центра его описанной окружности. Докажите, что сумма площадей треугольников $A'BC$, $AB'C$ и ABC' равна площади треугольника ABC .
10. Все клетки таблицы $n \times n$ покрашены в черный и белый цвета. Известно, что к границе прилегает хотя бы n черных и хотя бы n белых клеток. Докажите, что найдется не менее n различных пар (возможно пересекающихся) соседних разноцветных клеток.