Вступительные задачи, 11 класс

1. У Деда Мороза есть $n > 1$ различных подарков. Он как-то раскладывает их по мешкам и кладет мешки вокруг елки (важно содержимое мешков и порядок, в котором они лежат вокруг елки). Докажите, что количества способов сделать это, используя четное и нечетное количество мешков, равны. Пример: если есть три подарка A, B, C, то различные варианты – это A-(BC), B-(AC), C-(AB); (ABC), A-B-C, A-C-B.

2. Докажите, что при $a, b, c \geqslant 1$ выполнено неравенство $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}$.

3. В описанном четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $\angle ABD + \angle BCA = \angle BDA + \angle DCA$. Докажите, что либо одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам, либо четырехугольник $ABCD$ – вписанный.

4. В вершинах выпуклого 2017-угольника расставлены нули и единицы. Докажите, что 2017-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более чем на 1.

5. Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с помощью соотношений $f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(3^{2017})$ дают разные остатки при делении на 3^{2017}.

6. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $ab+1$ делится на $a+b$; $ab-1$ делится на $a-b$ и при этом $a > \sqrt{3}b - 1$.

7. В клетках квадрата 99×99 расставлены попарно различные вещественные числа. Клетчатый прямоугольник, лежащий в этом квадрате, называется *шельфом*, если каждое число в этом прямоугольнике меньше каждого числа, стоящего в клетке, граничащей с этим прямоугольником по стороне или углу. Найдите наибольшее возможное число шельфов.

8. В графе с $n \geqslant 4$ вершинами степень каждой вершины не меньше $3n/4$. На каждом ребре поставлена стрелка так, что из каждой вершины есть путь по стрелкам в любую другую. Докажите, что можно удалить одну вершину таким образом, чтобы из каждой вершины остался путь в любую другую.

9. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На этой прямой выбрана точка D так, что $AD = AB + AC$. Отрезки BD и AC пересекаются в точке F. Докажите, что прямая, проходящая через точку F параллельно BC, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

10. Внутри параллелепипеда выбрана точка M. Докажите, что на поверхности параллелепипеда можно выбрать бесконечно много пар точек X, Y таких, что M – середина отрезка XY.