

Серия 9(в): неожиданное открытие.

1. На столе лежат две кучки спичек: в одной – 100 спичек, в другой – 252. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять из одной кучки несколько спичек, количество которых является делителем числа спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник?

2. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p . Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 1000$.

3. На нижних 50 ступеньках лестницы длиной в 101 ступеньку лежит по камню. Сизиф может взять любой камень и отнести его вверх до ближайшей свободной ступеньки. Аид может скатить любой камень на предыдущую ступеньку, если она свободна. Ходят они по очереди. Может ли Сизиф поднять хоть один камень на верхнюю ступеньку?

4. На плоскости нарисован правильный 19-угольник. Постройте циркулем и линейкой правильный 57-угольник.

5. На плоскости даны $2n$ точек, соединенных дугами красного, синего и зеленого цветов, причем из каждой точки выходит ровно одна дуга каждого цвета. Пусть A , B и C – число соответственно красно-синих, красно-зеленых и сине-зеленых циклов. Докажите, что $n + A \geq B + C$.

6. На плоскости проведено N прямых. На каждой из них остальные $N - 1$ прямые высекают $N - 2$ равных отрезка. Докажите, что $N = 3$.

7. Назовем квартетом четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить в квадрате 25×25 ?

8. Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением 20 кругов. Докажите, что граница этой фигуры может быть представлена как объединение 38 дуг окружностей.