

Серия 7(b), клетчатая.

1. В клетках таблицы 7×7 записаны натуральные числа от 1 до 49 по порядку (то есть в клетке на пересечении i -й строки и j -го столбца записано число $7(i-1) + j$). За одну операцию можно увеличить число в одной из клеток на 1 и одновременно уменьшить на 1 числа в некоторых двух клетках, соседних с ней по стороне, либо, наоборот, уменьшить число в одной из клеток на 1 и одновременно увеличить на 1 числа в некоторых двух клетках, соседних с ней по стороне. Можно ли за несколько таких операций сделать числа во всех клетках равными 2013?

2. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать на 16 клетчатых многоугольников одинакового периметра?

3. Вася расставляет числа от 1 до 256 в клетки таблицы 16×16 (каждое число используется по одному разу). После этого Петя выделяет два столбца, а затем Вася выделяет две строки. После этого вычисляется сумма четырех чисел, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов. Может ли Вася наверняка добиться того, чтобы эта сумма равнялась 501?

4. Прямоугольник 42×44 разрезан на несколько прямоугольников 1×8 и две связанные фигурки из 4 клеток. Докажите, что эти фигурки равны.

5. Даны различные натуральные числа m и n . В одной из клеток бесконечной шахматной доски стоит (m, n) -конь, то есть фигура, которая при каждом своём ходе передвигается на m клеток по вертикали и n клеток по горизонтали или на n клеток по вертикали и m клеток по горизонтали. Докажите, что он не может попасть на соседнюю (по стороне) клетку менее, чем за $m + n$ ходов.

6. Клетки таблицы $2n \times 2n$ разбиты на пары. Столбцы и строки таблицы занумерованы по порядку слева направо и сверху вниз числами $1, 2, \dots, 2n$. Скажем, что клетка имеет координаты (i, j) , если она находится в i -й строке и j -м столбце. Расстоянием между клетками с координатами (i, j) и (k, l) назовем величину $|i - k| + |j - l|$. Найдите максимальное возможное значение суммы расстояний между клетками по всем парам.

7. n и k – натуральные числа, $n/2 < k \leq 2n/3$. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске $n \times n$ так, чтобы ни в какой строке и ни в каком столбце не нашлось k отмеченных клеток подряд?

8. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ расставлены числа таким образом, что сумма чисел в любом клетчатом квадрате 3×3 положительна, а в любом клетчатом квадрате 4×4 – отрицательна. При каких n такое возможно?