Серия 6(b), с примесью комбинаторики.

1. Пусть $1+x+x^2+\ldots+x^n=F(x)G(x)$, где F и G – многочлены, коэффициенты которых – нули и единицы. Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1+x+x^2+\ldots+x^k)T(x)$, где T – также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k>0$).

2. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где a и b – целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовем *черными* числа вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$, где c и d – целые, не равные нулю числа. Может ли черное число равняться сумме нескольких белых?

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная MN, пересекает прямую NK в точке E. Докажите, что прямая DE содержит среднюю линию треугольника ABC.

4. Даны натуральное k и простое $p>k$. Докажите, что не существует k последовательных натуральных значений n, для которых сумма $S(n)=1+2^n+\ldots+k^n$ делится на p.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке L, а продолжения стороны BC — в точке K. Прямая DK пересекает диагональ AC в точке X; прямая BX пересекает медиану CC_1 треугольника ABC в точке Y. Докажите, что прямая YL, медиана BB_1 треугольника ABC и его же биссектриса CC' пересекаются в одной точке.

6. В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были окрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

7. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

8. В школе три седьмых класса по M учеников в каждом. Каждый семиклассник знаком по крайней мере с $\frac{3}{4}M$ семиклассниками из каждого из остальных классов. Докажите, что школа может послать на олимпиаду M команд, каждая из которых состоит из трех знакомых друг с другом семиклассников, которые учатся в трех разных классах.