Серия 5(b): кое-что и неравенства.

1. Докажите, что если продолжения сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке W, а X и Y – середины диагоналей AC и BD, то площадь треугольника WXY равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

2. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

3. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Медиана BB_1 треугольника пересекает MN в точке D. Докажите, что точка O лежит на прямой DK.

4. Пусть

$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство $\rho(a,c)\leqslant\rho(a,b)+\rho(b,c)$.

5. Докажите, что для любых чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$, принадлежащих отрезку $[0;1]$, выполнено неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

6. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d верно неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

7. Докажите, что для n положительных чисел $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n$ выполнено неравенство в) $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2\geqslant(a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

8. Наибольшее из неотрицательных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ равно a. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$