Серия 4(b): арифметика.

1. Докажите, что существует лишь конечное количество простых p таких, что уравнение $x^3 + y^3 = 2016pxy$ имеет решение в натуральных x, y, не кратных p.

2. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что оба числа ab^5+3 и a^5b+3 являются кубами натуральных чисел?

3. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^{3^3}$, $\ldots$. Пусть b – натуральное число и b_i – остаток a_i по модулю b. Докажите, что b-ичная дробь $0, b_1b_2b_3\ldots$ равна рациональному числу.

4. Пусть n – натуральное число, и S – множество всех натуральных чисел a таких, что $1 < a < n$ и число $a^{a-1} - 1$ делится на n. Докажите, что если $S = \{n-1\}$, то n – удвоенное простое число.

5. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $\{a_i\}$, удовлетворяющие следующим двум свойствам:

(i) $a_{nk} = a_na_k$ при всех натуральных n, k

(ii) Для бесконечного количества натуральных чисел n выполнено $\{1, 2, \ldots, n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

6. Найдите все пары натуральных чисел n и k такие, что $n + 2^n = k!$.

7. Пусть n – составное число. Числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ – все числа из множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, не взаимно простые с n. Пусть $b_1, \ldots, b_k$ – перестановка чисел $a_1, \ldots, a_k$. Докажите, что найдутся индексы i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ такие, что a_ib_i и a_jb_j дают одинаковые остатки при делении на n.

8. Пусть $k > 2$ — целое число. Натуральное число m назовем *хорошим*, если числа $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ можно разбить на два множества так, чтобы сумма чисел в одном из них была в m раз больше, чем в другом. Докажите, что минимальное хорошее число взаимно просто с числом k.