Серия 3(b): формальная комбинаторика

1. По кругу расставлены $a+b$ целых чисел (a и b – данные натуральные числа). Пусть $n(r,s)$ – количество способов выбрать a чисел, стоящих подряд, так, чтобы сумма этих чисел давала при делении на 3 остаток r, а сумма остальных b чисел давала при делении на 3 остаток s. Докажите, что $n(1,2)-n(2,1)$ делится на 3.

2. Найдите все перестановки $p(1), p(2), \ldots, p(99)$ чисел $1, 2, \ldots, 99$, для которых ровно при одном натуральном $i \leqslant 99$ выполнено неравенство $p(p(i)) \geqslant i$.

3. Сколькими способами можно раставить целые неотрицательные числа во всех клетках таблицы 10×10 так, чтобы (i) каждые два числа в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более, чем на 1, и (ii) каждое число, не превосходящее ни одного числа в соседних по стороне клетках, было равно 0?

4. Пусть A – бесконечное множество натуральных чисел, такое, что любой его элемент является произведением не более чем 2016 простых чисел. Докажите, что можно найти натуральное число n и бесконечное множество $B \subset A$ такие, что наибольший общий делитель любых двух различных чисел из B равен n.

5. Марсианин рождается в полночь и живет ровно 100 суток. Известно, что за всю историю вымершей ныне марсианской цивилизации родилось нечетное число марсиан. Докажите, что было по крайней мере 100 дней, когда число жителей Марса было нечетным.

6. Для каждого натурального $i \leqslant N$ среди трёх чисел a_i, b_i, c_i хотя бы одно нечётно. Докажите, что можно найти такие целые x, y, z, что $xa_i + yb_i + zc_i$ нечётно по крайней мере для $\frac{4}{7}N$ различных значений i.

7. При каких натуральных n множество $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ можно разбить на n трёхэлементных множеств вида $\{a, b, c\}$, в каждом из которых числа $b-a$ и $c-b$ различны и принадлежат множеству $\{n-1, n, n+1\}$?

8. Для некоторого натурального n нашлось n таких строк одинаковой длины, составленных из нулей и единиц, что для любого $1 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ среди них найдутся две строки, отличающиеся ровно в k разрядах. Докажите, что n – либо точный квадрат, либо точный квадрат, увеличенный на 2.