Серия 2(b), алгебраическая

1. Найдите многочлен с целыми коэффициентами

а) четвертой степени, имеющий корнем число

$$\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}},$$

б) пятой степени, имеющий корнем число

$$\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}.$$

в) Докажите, что существует многочлен степени n с целыми коэффициентами, имеющий корнем число

$$\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}.$$

2. Докажите, что существуют натуральные числа m и n такие, что

$$\left|\frac{m^2}{n^3}-\sqrt{2001}\right|<10^{-8}.$$

3. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.

4. Пусть $f(x)$ – нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма $a+b+c$ которых равна 0, выполнено неравенство

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\leqslant 0.$$

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2.$$

Докажите, что $8xyz\leqslant 1$.

6. Вершины равностороннего треугольника лежат на гиперболе $y=1/x$. Пусть a равно сумме абсцисс, а b – сумме ординат трех вершин треугольника. Чему может равняться произведение ab?

7. На доске написаны натуральные числа от 1 до 4^n. Простой паренек по имени Педро может стереть любые два числа a и b, записав на их место число $\frac{ab}{\sqrt{2a^2+2b^2}}$. Он повторяет эту операцию, пока на доске не останется одно число. Докажите, что это число будет меньше $\frac{1}{n}$.

8, Вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ и $|a_1|+|a_2|+\ldots++|a_n|=1$. Докажите, что $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$.