Серия 1(b): хчл.

1. Имеются n квадратных трехчленов с буквенными коэффициентами и прозрачной мешок, содержащий $3n$ натуральных чисел. Двое ходят поочередно: каждый своим ходом берет из мешка число и заменяет им какой-либо из еще не замененных буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из n трехчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n > 2$?

2. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\text{ раз}} = 0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?

3. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

4. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y = ax^2 + bx + c$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)?

5. Докажите, что

а) можно выбрать отрезок натурального ряда и раскрасить его элементы в красный и зелёный цвета так, что сумма значений любого квадратного трёхчлена в красных точках равна сумме его значений в зелёных;

б) при каждом натуральном n можно выбрать отрезок натурального ряда и раскрасить его элементы в красный и зелёный цвета так, что сумма значений любого многочлена степени n в красных точках равна сумме его значений в зелёных.

6. Квадратный трехчлен $W(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами удовлетворяет следующему условию: для каждого простого p существует целое k такое, что числа $W(k)$ и $W(k + 1)$ оба делятся на p. Докажите, что существует целое число m, для которого $W(m) = W(m + 1) = 0$.

7. Существует ли квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального n количество различных простых делителей $f(n)$ ровно вдвое больше количества различных простых делителей n?

8. Дан квадратный трёхчлен $P(x) = x^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами. Известно, что для целых x_1, x_2 и x_3 значения $P(x_1)$, $P(x_2)$ и $P(x_3)$ делятся на натуральное число n. Докажите, что число $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ также кратно n.