

### Вступительные задачи, 9 класс

1. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

2. Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , чтобы прямоугольник  $a \times b$  можно было разрезать на несколько прямоугольников  $\alpha \times \beta$ .

Например, можно ли прямоугольник  $50 \times 60$  разрезать на прямоугольники размерами:

а)  $20 \times 15$ ; б)  $5 \times 8$ ; в)  $6, 25 \times 15$ ; г)  $(2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})$ ?

3. На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше  $1/2$ . Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше  $1/5$ .

4. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

5. Докажите, что сумма  $C_n^1 + C_n^3 \cdot 2021 + C_n^5 (2021)^2 + C_n^7 (2021)^3 + \dots$  делится на  $2^{n-1}$ .

6. Вычислите значение  $\underbrace{\sqrt{0,11111\dots11111}}_{100}$  с точностью а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой.

в) 200 знаков после запятой.

7. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

8. Алфавит состоит из трех букв:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Назовем *словом* последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (из двух и более букв) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разную длину.

Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

9. Из 16 космонавтов нужно выбрать четырёх – экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с четырьмя экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

10. Имеется две группы по  $n$  гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что

а)  $2n - 1$  взвешиваниями можно расположить все  $2n$  гирь в порядке возрастания их масс.

б) меньшим  $2n - 1$  числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.

(За одно взвешивание сравниваются массы двух гирь; массы всех  $2n$  гирь попарно различны.)