Серия 9(с): просто задачи порешать.

1. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел p_1, p_2, …, p_n, … такая, что $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ для каждого натурального n?

2. Целое число a таково. что число $3a$ представляется в виде $x^2 + 2y^2$, где x и y – целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком же виде.

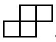
3. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$ не имеет решений в рациональных числах.

4. Какое наибольшее количество точек можно расставить на отрезке длины 1 так, чтобы на любом отрезке длины d оказалось не более $1000d^2 + 1$ точек?

5. (А.Туэ (1863-1922)). Пусть $n > 1$ – натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x \leqslant \sqrt{n}$, $y \leqslant \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$.

6. Для некоторых натуральных a и b число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ – целое. Докажите, что $(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

7. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – натуральные числа. Докажите, что $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \geqslant na_1$.

8. Квадрат $(2n-1) \times (2n-1)$ разрезан на фигурки трех типов: ,  и .

Докажите, что в разрезании участвует не менее $4n - 1$ фигурок первого типа (т.е. "уголков").