

Серия 8(с), с технической арифметикой

1. Из середины каждой стороны многоугольника отложен во внешнюю сторону вектор, равный по длине и перпендикулярный этой стороне. Докажите, что сумма построенных векторов равна $\vec{0}$.
2. Найдите такие вещественные числа a, b, p, q , чтобы равенство $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$ выполнялось при любых x .
3. Дано натуральное число b . Найдите наименьшее натуральное число $a > b$ такое, что $(a, b) = 1$ и $a^2 + a + b$ делится на b^2 .
4. Что больше: сумма пятых степеней натуральных чисел от 1 до 10000 или сумма десятых степеней натуральных чисел от 1 до 100?
5. a, b, c, d – натуральные числа, $ab = cd$.
 - а) Докажите, что существуют натуральные числа u_1, v_1, u_2, v_2 , для которых $a = u_1v_1, b = u_2v_2, c = u_1u_2, d = v_1v_2$.
 - б) Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное.
6. Постройте бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не являются точным квадратом.
7. Докажите, что при натуральном $m > 3$ $\sum_{\substack{1 \leq x \leq m \\ x^2 - x + 1 \leq m}} x$ делится на $m + 1$.
8. Докажите, что уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах x и y .