Серия 7(с): векторы и комбинаторика.

1. На плоскости дано $2n$ векторов, ведущих из центра правильного $2n$-угольника в его вершины. Сколько из них нужно взять, чтобы их сумма имела максимальную длину?

2. Докажите, что на ребрах тетраэдра нельзя расставить стрелки так, чтобы сумма образовавшихся векторов равнялась $\overrightarrow{0}$.

3. На плоскости нарисованы 1992 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Может ли начинающий построить свою игру так, чтобы не проиграть?

4. (Теорема Стюарта, 1746; доказательство: Р.Симсон, 1751). Чевиана длины d делит сторону c треугольника на отрезки длин m и n. Докажите,что $d^2 = \frac{a^2m+b^2n}{m+n} - mn$.

5. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

6. В волейбольном однокруговом турнире участвовало 2^n команд. Докажите, что после окончания турнира можно выбрать $n+1$ команду $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ так, чтобы каждая из них выиграла у всех команд с бо́льшими номерами.

7. Прямоугольник разбит на несколько прямоугольников. Назовем *перекрестком* точку, принадлежащую четырем прямоугольникам разбиения, а *максимальным отрезком* – отрезок, идущий по сторонам прямоугольников разбиения и не содержащийся ни в каком большем отрезке, идущем по сторонам прямоугольников разбиения. Докажите, что сумма количества перекрестков и количества максимальных отрезков на 3 больше количества прямоугольников разбиения.

8. а) Докажите, что в полном ориентированном графе существует путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.

б) Докажите, что в связном полном ориентированном графе существует цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз.