Серия 6(с), техническая

1. Последовательность x_1, x_2, x_3, …задана правилами: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, x_{n+1} – наибольший простой делитель числа $x_1x_2\ldots x_n + 1$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком n.

2. Пусть A – множество действительных чисел, обладающее следующими свойствами: a) $1 \in A$; b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$; c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$.

Докажите, что $2000 + \sqrt{2001} \in A$.

3. Пусть a и c – целые числа, $|a| < 2000$, $|c| < 2000$. Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + 1998x + c = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2, то $|x_1 - x_2| \geqslant \frac{1}{998}$.

4. Какое наибольшее значение может иметь разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$?

5. $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ – последовательность натуральных чисел такая, что $a_{n+a_n} = 2a_n$ при любом натуральном n. Докажите, что найдется такое натуральное число c, что $a_n = n + c$ для любого n.

6. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального m числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, … попарно взаимно просты.

7. $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ при $x \in [0;1]$. Докажите, что $|a| + |b| + |c| \leqslant 17$.

8. На координатной плоскости отмечены точки $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3,0)$, $D(4,0)$, $E(-2,5)$, $F(-1,5)$, $G(8,5)$, $H(9,5)$. Может ли график квадратного трехчлена пересекать четыре отрезка: AB, CD, EF, GH?