

Серия 5(с): векторы и повторение

1. M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F – середина MP , G – середина NQ . Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет четверо меньшую длину.
2. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n -угольника в его вершины, равна $\vec{0}$.
3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
4. Даны 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h . Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.
5. а) A, B, C, D, E, F – произвольные точки. Докажите, что $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE}$.
б) На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы \vec{AB} , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.
6. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.
7. При каких целых m и n выполняется равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$?
8. Докажите, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 19$ имеет бесконечно много решений в целых числах.