Серия 4(с): формулы и разговоры

1. Докажите, что при любых целых a и b система уравнений $x+y+2z+2t=a$, $2x-2y+z-t=b$ разрешима в целых числах.

2. Обозначим через $p(n,k)$ количество делителей числа n, не меньших, чем k. Чему равна сумма $p(1001,1)+$ $+p(1002,2)+p(1003,3)+\ldots+p(2000,1000)$?

3. Натуральные числа p и q таковы, что $p \geqslant q$. У ослика Иа-Иа есть pq палочек, из которых он может составить p q-угольников. Докажите, что из этих же палочек Иа-Иа может составить q p-угольников.

4. В вершинах выпуклого 65-угольника написаны различные натуральные числа, каждое из которых не превосходит 1977. Докажите, что найдутся две диагонали, для которых разности чисел, написанных у их концов, одинаковы.

5. Из целых чисел от 1 до $3n$ выбрали $n+2$ каких-то чисел. Доказать, что при $n>1$ среди выбранных чисел непременно найдутся два таких, разность между которыми больше n, но меньше $2n$.

6. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом.

7. С натуральным числом, написанным на доске, разрешается проделать такую операцию: умножить его на выражение $(p-1)^2/p$, где p – его простой делитель, и записать результат вместо исходного числа. Докажите, что, какое бы исходное число мы ни взяли и как бы мы ни проделывали описанные операции, на доске рано или поздно появится число 1.

8. На квадратной доске $n\times n$ стоит $n-1$ фишка. Докажите, что, переставляя строки и столбцы, можно поместить все фишки ниже главной диагонали.