Серия 3(с): неравенства

1. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leqslant x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого набора действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнено неравенство $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})$.

3. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют условиям $|a| > 2$ и $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$. Докажите, что существуют такие вещественные x и y, что выполнены равенства $a = x + 1/x$, $b = y + 1/y$, $c = xy + 1/xy$.

4. a, b, c – длины сторон треугольника, а $x + y + z = 0$. Докажите, что $a^2yz + b^2zx + c^2xy \leqslant 0$.

5. Решите в положительных числах уравнение $(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1)$.

6. Найдите все вещественные решения уравнения $(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^5) = 6x^5$.

7. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n > 2)$ удовлетворяют условиям $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1$. Докажите, что $a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \ldots + a_n(b_n + a_1) < 1$.

8. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $(1 + x)(1 + y) = 2$. Докажите, что $xy + \frac{1}{xy} \geqslant 6$.