Серия 2(с), межеумочная

1. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, одним из корней которого является а) $1+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$?

2. а) $(\sqrt{2}+1)^7=\sqrt{57122}+\sqrt{57121}$. Докажите, что $(\sqrt{2}-1)^7=\sqrt{57122}-\sqrt{57121}$.

б) Пусть $(\sqrt{2}+1)^n=a+b\sqrt{2}$. Докажите,что $(1-\sqrt{2})^n=a-b\sqrt{2}$.

3. Докажите, что для каждого натурального n существует натуральное k такое, что $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

4. В некотором множестве M выделено несколько попарно пересекающихся подмножеств (это значит, что пересечение любых двух из выделенных подмножеств является непустым множеством). Пусть A – некоторое подмножество множества M. Докажите, что либо подмножество A, либо дополнение этого подмножества до множества M пересекается с каждым подмножеством из выделенного семейства.

5. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 14×14 и в каждой его клетке записано какое-либо из чисел 1, 2, $\ldots$, 1977. Докажите, что существуют такие прямоугольники P и Q, вершины которых находятся в центрах клеток, что сумма чисел, записанных у вершин прямоугольника P, равна сумме чисел, записанных у вершин прямоугольника Q.

6. Докажите, что для каждого натурального a существует единственная пара натуральных чисел (x,y) такая, что $a=x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}$.

7. Пусть n – натуральное число. Докажите, что число упорядоченных пар натуральных чисел (u,v), для которых $[u,v]=n$, равно числу натуральных делителей n^2.

3. Докажите, что у любого вещественного числа, не являющегося целым, есть кратное, отстоящее от ближайшего целого числа не менее чем на $1/3$.